由两道模拟题引起的对圆锥曲线性质的思考

常州市田家炳高级中学 徐颖 213000

最近笔者在圆锥曲线章节，发现了两个很有意思的解析几何题，对题中的相关结论作了一般性的分析探究，得到了圆锥曲线的一组性质，在此与大家分享.

**试题1:**已知椭圆过点为椭圆上任意一点，椭圆在点

处的切线与直线和右准线分别交于点.

求证：当点在椭圆上移动时，(为椭圆的离心率)

探究1：题中涉及椭圆在任意点处的切线，过右焦点且与轴垂直的直线，椭圆的右准线.在给学生讲解了以上问题后，笔者大胆猜测该结论是否对任意椭圆都成立？于是进行了认真地思考，并用几何画板进行探究. 下面就以焦点在轴上的椭圆方程为例进行验证.至于椭圆上某点处的切线方程，利用导数的工具给出，方便简洁.

**性质1**：已知椭圆，为椭圆上任意一点，椭圆在点处的切线与直线和右准线分别交于点.求证：当点在椭圆上移动时，(为椭圆的离心率)

*x*

*y*

*F*

*P*

*M*

*N*

*l*

*O*

证明：若考虑上半椭圆的方程

图1

而在点处的切线的斜率为,故切线方程为

化简得

若同理可得切线方程为

若切线方程也满足上式.

综上，以椭圆上一点为切点的切线方程是

将切线方程与分别联立：

解得，

解得，



而



故即

**性质2**：如图2，已知双曲线，为双曲线上

*M*

图2

*x*

*y*

*O*

*N*

*P*

*F*

*l*

任意一点，双曲线在点处的切线与直线和右准线

分别交于点.求证：当点在双曲线上移动时，

(为双曲线的离心率)

探究2：因为椭圆和双曲线都是双焦点，双准线的对称图形，从上述证明过程和结论来看，右焦点不变，如果换成左焦点与轴垂直的直线和左准线，结论依旧成立.对于圆锥曲线家族中的“抛物线”而言，它有一个焦点，一条准线，对称性不是那么完美，那结论又如何呢？

**性质3**：如图3，已知抛物线，为抛物线上任意一点，抛物线在点处的切线与直线和准线分别交于点.求证：当点在抛物线上移动时，

*y*

*x*

*O*

*M*

*N*

*P*

*F*

*l*

证明：当位于抛物线的上半支，则设切点



切线的斜率

图3

故切线方程为即

解得解得

即

位于抛物线的下半支时同理可证. 故

综上，我们得到了圆锥曲线的一个重要的性质：

**性质4**：任意圆锥曲线为上任意一点，曲线在点处的切线与过焦点的垂直于轴的直线交于与相应的准线交于,当点在上移动时,都有

（为圆锥曲线的离心率）.

**试题2**：如图4，在平面直角坐标系中，椭圆的离心率为直线与椭圆相交于两点，是椭圆上异于的两点，且相交于直线相交于连接

*D*

图6

*x*

*y*

*O*

*A*

*M*

*C*

*B*

*N*

(1)求；(2)求证：直线的斜率为定值.

答案：(1) (2) 

*A*

*B*

*C*

*D*

*M*

*N*

*O*

*x*

*y*

*O*

*M*

*D*

*C*

*A*

*N*

*B*

图5

图4

探究3：如果将本题的椭圆看作是圆，会有怎样的结论？

如图5，是圆的直径，是圆上异于的两点，且相交于点相交于点则有

(理由：是圆的直径，故即为三角形的垂心，由三角形三条高交于一点可得)

探究4：在圆中，直线与直径垂直.在椭圆和双曲线中与又有什么联系呢？

**性质5**：在平面直角坐标系中，椭圆，直线与椭圆相交于两点， 是椭圆上异于的两点（在同侧），且相交于直线相交于连接则直线的斜率为定值.

证明：设所在的直线方程为当

当斜率都存在时，设

两式相减得即

即即

故.（1）

同理，即

.（2）

故

当中有斜率不存在时，不妨设不存在，故

由上可知， 即

故

综上，直线的斜率为定值.

**性质6**：如图6，在平面直角坐标系中，双曲线，直线与双曲线相交于两点， 是双曲线上异于的两点（在同侧），且相交于直线相交于连接则直线的斜率为定值（证明方法与上述椭圆类似）

一道高考解析几何试题的命题背景可能就是圆锥曲线的一个性质定理的特殊情况，如果我们掌握了定理的原理，也就把握了试题的本质.在平时的教学过程中，对一些典型的试题，我们可以引导学生深入探究试题背后的知识背景，挖掘问题的本质，这样才能真正找到解决问题的方法，并且能举一反三，学会用更广阔的视角去看待数学问题.

作者简介：徐颖，硕士研究生，任教于常州市田家炳高级中学，中学一级教师，获得：常州市信息化教学能手二等奖，卡西欧杯论文二等奖，常州中学数学教育年会论文一等奖，常州市导学优秀教师，校教坛新秀，校评优课一等奖等.

通讯地址：常州市天宁区吊桥路2号 田家炳高级中学 213000，

联系电话 18015027882，邮箱：764459101@qq.com