换元开门，蝴蝶自来

——一道模拟调研填空题的多视角求解

美国著名数学教育家波利亚说过，掌握数学就意味着要善于解题.当遇到一个新问题，总想用熟悉的题型去“套”，这仅仅只是解出来，并没有真正意义上弄懂它，只有对数学思想方法理解透彻，会举一反三时，才能提出新看法、巧解法.近年数学高考十分重视对于数学思想方法的考查，尤其突出对能力的考查，其解答过程都蕴含着重要的数学思想方法.我们要有意识地应用数学思想方法去分析问题、解决问题.高中数学思想方法有很多，这里重点说说换元法.

换元法又称为“变量代换法、辅助元素法”.换元的实质是转化，关键是构造元和设元，理论依据是等价代换，目的是变换对象，将问题转化在新对象的知识背景下去研究， 把分散的条件联系起来，把隐含的条件显露出来，把条件和结论联系起来，把非标准问题标准化，复杂问题简单化，陌生问题熟悉化[1].本文将以南通等市的2016届高三调研卷上的一道填空题为例，浅谈几种换元法的妙用.

**1试题呈现**

题目（南通市、扬州市、淮安市、宿迁市、泰州市2016届高三第二次调研测试填空题13）

设实数满足则的最小值是\_\_\_\_\_\_\_．

**2解法探究**

**2.1目标换元法**

处理最值时，通常将目标函数看作一个未知变元，通过它与已知条件建立等式或不等式.

**解**：令则代入化简得

令则在上有解.

注意，当时，故只需要

解得此时符合.故的最小值是

评注：本解法实际上经过了2次换元，第1次从目标函数入手，通过消元，建立的新关系；第2次换元是降次，关于的四次方程难以解决，于是考虑换元成熟悉的二次，但在此过程中，需要再次注意新元的范围，后面是一个二次方程有解问题，易错.开头的目标换元应该是学生比较容易想到的，在线性规划这块用得较多.虽然入手容易，但是后面较难解决.所以很多学生半途而废.

**2.2 “1”的妙用**

分析：注意到所求的表达式是二次齐次式，而题意条件给出也是齐次式，还是常数1，于是考虑用“1的代换”.

**解**：由令

则再令则故当且仅当时取.

评注：本题利用“1的代换”变成分式二次型，再上下同时除以，变成单变量这里，解决的最值，除了上述的基本不等式外，还可以利用导数. 令再结合解得，即在上单调增，在上单调减，故

**2.3 比值换元[2]**

如果已知条件为比例式子或者可以看作比例，那么用比值代入可使其简化.本题给出的条件是二元齐次式，不妨引入参数，考虑用正比例函数将两个变量的依存关系表示出来，从而使二元变量的最值问题转化成一元变量的最值.

**解**：设代入原方程得由于，故即而这样就回到了解法2.以下略.

评注：很明显，经过换元快速将两变量的化简为单变量的相对于解法2，快捷，方便.

**2.4 三角换元**

三角换元的基本思想是根据已知条件，引入新的变量三角函数，从而使多元代数问题变成一元三角函数问题（只含有）,接下来利用三角函数的性质或者三角恒等变换等解决问题. 在高中数学解题方法中，三角换元是常见的换元方式，在遇到圆，椭圆，双曲线等方程时均可以考虑三角换元，形如等.

**解**：即为不妨令则



令则即为

这样就回到了解法1.以下略.

评注：这里，平方差等于1的三角换元并不经常遇见，换元形式要熟记：

**2.5 和差换元**

若则可设特别地，若则可设

，这样的换元我们称之为和差换元.

**解**：令代入化简得



当且仅当时取.

评注：虽然利用和差换元引入新变量但是整个代数式变得简单明了，本解法中的换元巧妙得很，只留下，为后面使用基本不等式做了铺垫.本题若这样换元：得而所求的是的范围，明显难度上升了.

**2.6 极坐标换元**

方程所表示的曲线方程是直角坐标系下的双曲线，若将其置于极坐标下会有怎样的形式呢？我们不妨来试一试.

**解**：以直角坐标系的原点为极点，轴正向为极轴建立极坐标系，令

，代入化简得



令回到了解法2.以下略.

评注：转换视角，置于不同的坐标系，有创意！这个解法精妙之处在于题干和所求均为齐二次式，否则处理难度便会加大.极坐标变换是理科生学习的内容，所以这个解法对于文科生的学习能力要求较高.

**2.7 局部换元**

解：即为可知构成等比数列，可设从而则

当且仅当时取

评注：应用局部换元法，起到了化繁为简、化难为易的作用。为什么会想到换元，又如何设元?关键是发现题干可以因式分解, 构成等比数列，三者有内在联系而实施换元，这是我们思考局部换元解法时要注意的一点.如果下次遇见类似等差数列的形式也就迎刃而解了.

**3 解题反思**

至此，笔者给出了一道调研模拟题的7种换元解法.在分析问题时，需要关注条件及所求结论的特点和相互联系，从不同视角寻找问题的突破口. 我们使用换元法解题时要注意以下两点：（1）选择合适的变量进行换元，要遵循有利于运算、有利于标准化的原则；（2）换元后要注重新变量范围的选取，一定要使新变量范围对应于原变量的取值范围，要注意挖掘隐含的限制条件，还要根据题设条件来进一步验证. 换元引参思想内涵丰富，如果学生能掌握上述这些方法，以后遇到类似的二元变量最值问题就可以顺利解决了.

**参考文献**

[1] 陈跃. 浅谈换元法在求最值问题中的应用[J]. 数学学习与研究，2015(19)：119

[2]傅建红.从一道高考题看二元条件最值问题的求解策略[J].数学教育研究.2011(5)，55-56.